



TITLE:

# 乱流の慣性小領域におけるラグランジュ統計 (乱流構造の数理解析: 発生・動力学・統計・応用)

AUTHOR(S):

石原, 卓; 金田, 行雄

---

CITATION:

石原, 卓 ...[et al]. 乱流の慣性小領域におけるラグランジュ統計 (乱流構造の数理解析: 発生・動力学・統計・応用). 数理解析研究所講究録 2001, 1226: 86-93

ISSUE DATE:

2001-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/41387>

RIGHT:

## 乱流の慣性小領域におけるラグランジュ統計

名大工 石原卓 (Takashi Ishihara), 金田行雄 (Yukio Kaneda)

Department of Computational Science and Engineering,

Graduate School of Engineering, Nagoya Univ.

### 1 はじめに

自然界では大小様々な規模において乱流による物質や熱の輸送・拡散現象が起きている。それらを理解し、定量的に予測・制御することは、社会的にも工学的にも非常に重要なことである。

流体粒子の初期位置からのずれの二乗平均が乱流場のラグランジュ的一点二時刻速度相関の時間積分で厳密に記述されること<sup>[1]</sup>は良く知られているが、ラグランジュ的一点二時刻速度相関そのものの性質についてはよく理解されていない。Kolmogorov 1941(K41)の第二仮説によれば、ラグランジュ的一点二時刻速度相関と密接に関係するラグランジュ的な速度差の二次モーメント (§. 3 参照) が、慣性小領域の (粘性効果が無視できる) 時間スケールにおいて時間に比例するという普遍的な関係式が導かれる。

また、二つの流体粒子の間の距離の二乗平均が時間の三乗に比例して増大すること<sup>[2]</sup>が実験的に知られており、それは慣性小領域における (粘性を無視した) 次元解析から得られる普遍的な関係式であること<sup>[3]</sup>が示されている。

乱流における普遍則の有無を明らかにするため、上記の関係式等を実験によって検証しようとする試みは多くなされてきたが、K41 のエネルギースペクトル ( $E(k) \propto \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$ ) ほど統一的な見解はない。その理由の一つとして、実験によりラグランジュ的統計量と乱流場の統計量を正確に測定することの困難さが考えられるが<sup>[4]</sup>、他の可能性として、乱流拡散現象のレイノルズ数依存性等の理解が不十分であることも考えられる。

乱流のラグランジュ的スペクトル理論は、レイノルズ数が十分大きく慣性小領域が十分広い場合に対して上記の普遍的な関係式を導き、その中に現れる普遍定数も決定する<sup>[5, 6]</sup>。Ott と Mann は、最新の実験機器を用いた粒子追跡により二粒子拡散の統計量を求め、スペクトル理論値との差異を指摘している<sup>[7]</sup>。しかし、彼等の実験におけるテラー長  $\lambda$  に基づくレイノルズ数 ( $R_\lambda$ ) は比較的小さく (100 以下)、理論の守備範囲外での比較である可能性も否定できない。

乱流の直接数値計算 (DNS) では、粒子追跡によりラグランジュ的統計量を正確かつ詳細に得ることが出来る。しかしこれまでの DNS では計算能力の制約から解析できる乱流場の  $R_\lambda$  は比較的小さく慣性小領域がなかったため、上述の普遍則の直接的な検証にはなっていなかった<sup>[8, 9, 10]</sup>。近年、計算機の進歩により慣性小領域のある乱流場が DNS で実現可能となった。慣性小領域のある乱流場を用いてラグランジュ的統計量を調べ理論と比較することは、より現実的な高レイノルズ数の乱流場における乱流拡散現象等を予測するためにも非常に有意義なことであると考えられる。

そこで、本研究では DNS により慣性小領域のある乱流場を実現し、数値的に得られる速度場中で粒子追跡することにより、上記普遍則に関わるラグランジュ的統計量を調べ、ラグランジュ的スペクトル理論 (LRA) との比較を行う。§2 では、DNS の方法と DNS で得られた乱流場の性質について述べる。§3 では、ラグランジュ的な一点二時刻統計量として、ラグランジュ的な速度差の二次

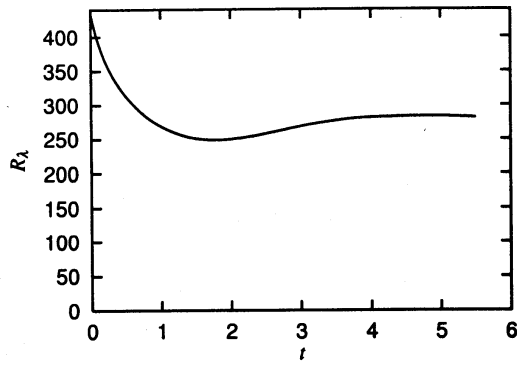
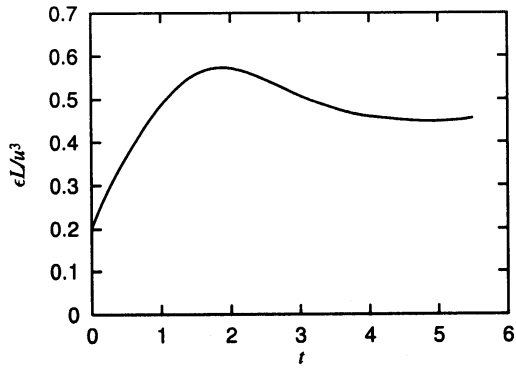


図 1: 規格化したエネルギー散逸率の時間変化

図 2: Run1024 における  $R_\lambda$  の時間変化

モーメントに関する結果, §4 では, 二粒子拡散に関する統計量として, 二粒子間の距離のモーメント及び確率密度関数について調べ, スペクトル理論の予測と比較する. 最後に §5 でまとめを行う.

## 2 乱流の直接数値計算の方法

本研究では周期境界条件 (基本周期  $[0, 2\pi]^3$ ) の下, 密度一定の非圧縮性流体を考える. 流体の運動は外力のある Navier-Stokes(NS) 方程式の DNS により求めた. 空間微分にはフーリエスペクトル法を用い, 非線型項を計算するときに生じるエリアジング誤差は, 空間一方向の格子点数を  $n$  とした場合, 波数  $k_{max} = \sqrt{2}n/3$  以上のモードの打ち切りと phase shift により完全に除去した. また, 時間発展には 4 次のルンゲクッタ法を用いた.

外力には低波数領域 ( $0.5 < |\mathbf{k}| < 2.5$ ) で粘性係数を負にし, 全エネルギーを一定に保つものを用いた. 格子点数  $n$  の DNS では, 格子点数  $n/2$  で作成した準定常乱流場を初期条件として,  $k_{max}\eta = 2$ ,  $[\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}]$  を満足するように動粘性係数  $\nu$  の値を決め, 準定常状態が得られるまで時間発展を行った. なお,  $\nu$  の値を決める際, 積分長 ( $L$ ) と速度の成分の rms ( $u_{rms}$ ) で規格化したエネルギー散逸率 ( $\epsilon L/u_{rms}^3$ ) が  $n(> 256)$  に依らず, 準定常状態で約 0.5 になるという数値結果 (図 2 参照) を用いた.  $n = 256, 512, 1024$  の DNS では各々  $\nu = 1.0\text{E-}3, 7.6\text{E-}4, 2.9\text{E-}4$  とし, 時間刻みは  $\Delta t = 1.0\text{E-}3, 1.0\text{E-}3, 6.25\text{E-}4$  とした. 計算には名古屋大学計算機センターの vpp5000/56 の 32PE を用いた.  $n = 1024$  の場合, 4 次のルンゲクッタ法の 1 ステップ (3 次元 FFT の回数=36) に必要な cpu 時間は約 160 秒であった.

ラグランジュ的統計量は, 準定常状態の乱流場中に配置した流体粒子の軌道を各々求めることにより計算した. 二粒子拡散に関するラグランジュ的統計量を組織的に得るため, 特に  $n = 1024$  の DNS では一様に配置した  $32^3$  個の粒子の集合に対し, それから  $x$  軸方向に  $m\Delta x$  ( $m = 4, 12, 28$ ) だけシフトした 3 集合 [全体で  $32^3 \times 4 = O(10^5)$  個] の粒子追跡を行った. 粒子位置における速度は 3 次スプライン補間を用いて求め, 粒子の運動方程式は 4 次のルンゲクッタ法を用いて解いた.  $O(10^5)$  の粒子追跡に必要な計算時間は乱流場の時間発展に比べ約  $1/16$  であった.

図 1 と 2 に  $n = 1024$  の DNS (以降 Run1024 と呼ぶ) における, 上述の規格化したエネルギー散逸率と  $R_\lambda$  の時間変化を示す.  $T \equiv L/u_{rms}$  は約 2.18 である. 粒子追跡は  $t = [3.0, 3.75]$ ,  $t = [4.5, 5.5]$  で行ったが, その時間の  $\epsilon$  と  $R_\lambda$  の時間変化は  $t = [4.5, 5.5]$  の方が小さいことが分る. 図 3 は上記

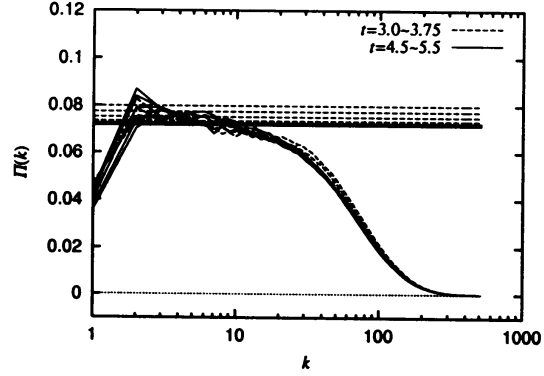
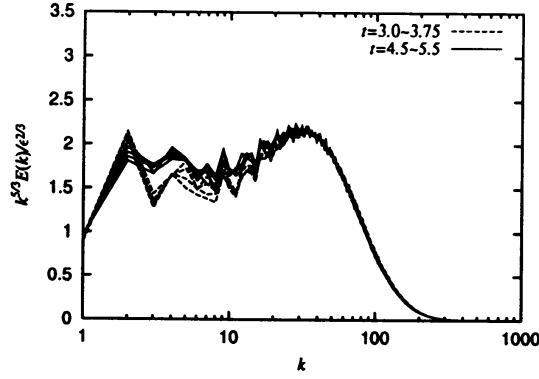


図 3: 粒子追跡した時刻におけるエネルギーース 図 4: 粒子追跡した時刻におけるエネルギー流  
ベクトル 束関数とエネルギー散逸率の値

時刻におけるエネルギーースペクトル, 図 4 はエネルギー流束関数  $\Pi(k)$  とエネルギー散逸率を示す. 図 4 より波数  $k \approx [5, 20]$  において, 時刻  $t = [4.5, 5.5]$  では  $\Pi(k) \approx \epsilon$  であるのに対し,  $t = [3.0, 3.75]$  では  $\Pi(k)$  と  $\epsilon$  に若干のずれがある. また, 図 3 では  $k \approx [5, 20]$  における  $k^{5/3} E(k) / \epsilon^{2/3}$  の変化は  $t = [4.5, 5.5]$  が  $t = [3.0, 3.75]$  に比べ小さいことが分る. 以上の観察から場の統計的定常性は  $t = [4.5, 5.5]$  の方が  $t = [3.0, 3.75]$  より良いことが分る.

### 3 ラグランジュ的一点二時刻統計量

時刻  $t_0$  に場所  $\mathbf{x}_0$  にあった流体粒子の時刻  $t$  における位置を  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0; t)$  [i.e.,  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0; t_0) = \mathbf{x}_0$ ], 速度を  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0; t)$  とすると, 流体粒子の発展方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0; t)}{\partial t} = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0; t)$$

で与えられる. 今, ラグランジュ的速度差 (一成分) の二次モーメントを

$$D_L(\tau) = \langle [v_1(\mathbf{x}_0, t_0; t_0 + \tau) - v_1(\mathbf{x}_0, t_0; t_0)]^2 \rangle \quad (1)$$

により定義する. ここで  $v_1$  は  $\mathbf{v}$  の一成分,  $\langle \rangle$  はアンサンブル平均を示す.  $D_L(\tau)$  とラグランジュ的速度相関  $R_L(\tau) = \langle v_1(\mathbf{x}_0, t_0; t_0 + \tau) v_1(\mathbf{x}_0, t_0; t_0) \rangle$  の間には以下の関係が成り立つ:

$$D_L(\tau) = 2 (\langle u^2 \rangle - R_L(\tau)). \quad (2)$$

粘性散逸領域の特徴的な時間スケールを  $\tau_\eta = (\nu/\epsilon)^{1/2}$  としたとき, K41 の仮説の下では

$$D_L(\tau) = C_0 \epsilon \tau, \quad (\tau_\eta \ll \tau \ll T) \quad (3)$$

が導かれ  $C_0$  は普遍的な定数となる. 大気境界層における Hanna の観測による  $C_0$  の値は  $3.8 \pm 1.9$  である [11]. Fung 等 [12] の Kinematic Simulation による値は約 5.0, ラグランジュ的スペクトル理論による値は, ALHDIA では 5.83, [13] LRA では 5.9 [14] である. 一方, Yeung と Pope(1989) の DNS による値は  $R_\lambda$  と共に増加する傾向があり最大の  $R_\lambda = 93$  において約 4.0 であるが, その DNS では慣性小領域が実現できていないため, 式 (3) の直接的な検証になっていない.

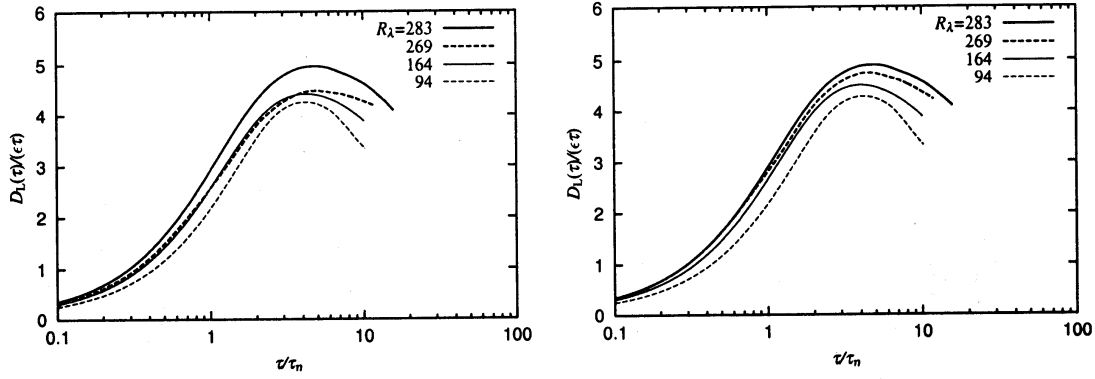


図 5: 各  $R_\lambda$  における  $D_L(\tau)/(\epsilon\tau)$  vs.  $\tau/\tau_\eta$  のプロット.  $\epsilon$  の値としてエネルギー散逸率を用いた場合 (左) とエネルギー輸送率の適当な平均値を用いた場合 (右).

図 5 は今回の DNS で得られた  $D_L(\tau)/(\epsilon\tau)$  の値を示す. 図 5 の曲線の傾きが 0 となるところが式 (3) のスケーリングを示している. 左図においては  $\epsilon$  の値として時間変化するエネルギー散逸率の値を用いた. 一方  $\epsilon$  の値にエネルギー輸送率  $\Pi(k)$  の値がほぼ一定となる ( $k$  依存性が小さいと思われる) 適当な波数領域における平均値を用いたのが右図である. 曲線等の  $R_\lambda$  依存性は左図と比べ右図の方が組織的になっているのに対し, 左図においては特に Run1024 で時刻  $t = 3.0$  から粒子追跡を行って得られた  $R_\lambda = 269$  の曲線のピークが  $R_\lambda = 164$  のそれとほぼ同程度となり, ピーク値の  $R_\lambda$  依存性の序列を乱している. 左図の  $R_\lambda = 269$  の曲線の特異な振る舞いの原因としては, Run1024 の時刻  $t = 3.0$  における場の非定常性 (エネルギー散逸率とエネルギー輸送率の値の不一致) が考えられる. 一方, 右図の方が組織的となった事実から, 右図で用いたエネルギー輸送率の値が  $D_L(\tau)$  を支配していること示唆される. 右図より  $R_\lambda$  の値の増加と共に  $D_L(\tau)/(\epsilon\tau)$  の値が一定となる時間間隔が短いながらも僅かに増加している様子, 及び  $D_L(\tau)/(\epsilon\tau)$  のピーク値が組織的に増加している様子が観察できる. 今回の DNS における最大  $R_\lambda (= 283)$  においても  $\tau_\eta \ll \tau \ll T$  となる有効な時間間隔が短いため,  $D_L(\tau)/(\epsilon\tau)$  の値が一定となる時間間隔も短くなったと考えられる. (ラグランジュ的速度相関  $R_L(\tau)$  が  $\tau \rightarrow \infty$  で 0 に漸近すると仮定すると式 (2) から準定常な乱流場において  $D_L(\tau)/(\epsilon\tau)$  の値もいずれ 0 になることに注意.) 図 5 右より  $C_0 \approx 5.0$  ( $R_\lambda = 283$ ) は結論できるが, これが  $R_\lambda \rightarrow \infty$  に対する  $C_0$  の漸近値であるかどうかを判断するにはより広い慣性小領域のある大規模な DNS による検証を必要とする.

## 4 相対粒子拡散

次に二粒子の相対拡散を考える. ALHDIA 理論を基にした, 乱流中の相対粒子拡散の解析 [5] を LRA 理論を基に行うと, 時刻  $t_0$  に  $\mathbf{r}_0$  離れていた二つの粒子が時刻  $t$  に  $\mathbf{r}$  離れている確率密度  $P(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0)$  の発展方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial r_i} \left[ \eta_{ij}(\mathbf{r}, t, t_0) \frac{\partial}{\partial r_j} P(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) \right], \quad (4)$$

$$P(\mathbf{r}, t_0; \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{1}{2} [\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \delta^3(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)] \quad (5)$$

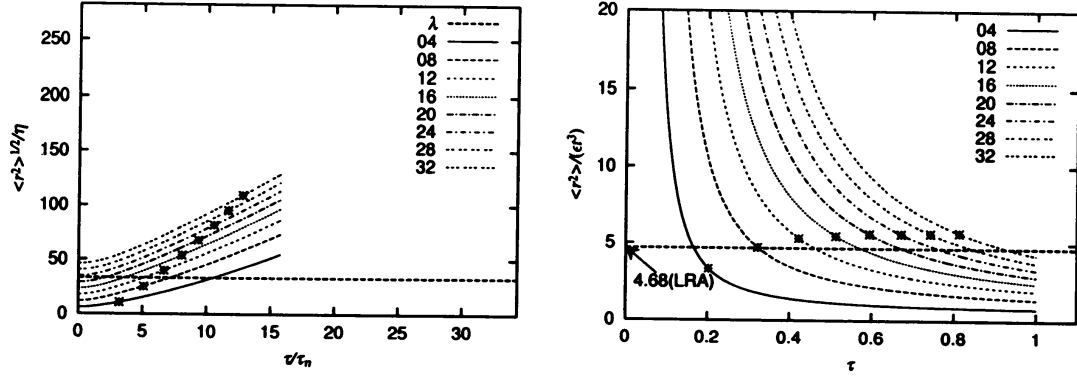


図 6: Run1024 の  $t=4.5$  から粒子追跡を行って作成した  $\langle r^2 \rangle^{1/2} / \eta$  vs.  $\tau / t_\eta$  の値のプロット (左) と  $\langle r^2 \rangle / (\epsilon \tau^3)$  vs.  $\tau$  の値のプロット (右). 各線の数字は粒子追跡開始時の二粒子の距離  $r_0$  が  $\Delta x = 0.7\eta$  の何倍であるかを示す. マークは  $\tau_0 = (r_0^2 / \epsilon)^{1/3}$  を示す.

で与えられる. ここで

$$\eta_{ij}(\mathbf{r}, t, t_0) = 2 \left[ \kappa_{ij}(t, t_0) - \int_{t_0}^t ds Q_{ij}(\mathbf{r}, t, s) \right], \quad \kappa_{ij}(t, t_0) = \int_{t_0}^t ds Q_{ij}(\mathbf{0}, t, s), \quad (6)$$

$$Q_{ij}^s(\mathbf{r}, t, s) = \sum_m P_{im}(\nabla_r) \langle v_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}, s; t) u_j(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad t > s \quad (7)$$

であり,  $P_{im}(\nabla_r)$  は  $P_{im}(\mathbf{k}) = \delta_{im} - k_i k_m / k^2$  の逆フーリエ変換である [6].

慣性小領域が十分広く,  $\eta \ll r_0 \ll r \ll L$  かつ  $(r_0^2 / \epsilon)^{1/3} \ll \tau = t - t_0 \ll T$  であり,  $P(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0)$  が球対称  $[= P(r, \tau)]$  になると仮定すると, 慣性小領域における  $P(r, \tau)$  の発展方程式

$$\frac{\partial P(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 K \frac{\partial}{\partial r} P(r, \tau) \right] \quad (8)$$

を得る. 慣性小領域において  $K = K(r, \tau) = \epsilon^{1/3} r^{4/3} F(\epsilon^{1/3} r^{-2/3} \tau)$  であり,

$$F(s) = 4C_K \int_0^s ds' \int_0^\infty dx \left( \frac{1}{3} - \frac{\sin x}{x^3} + \frac{\cos x}{x^2} \right) G(s' x^{2/3}) x^{-5/3} \quad (9)$$

は  $K$  の時間依存性を表す無次元関数,  $C_K = 1.72$  は LRA 理論による Kormogorov 定数,  $G(\tau)$  はラグランジュ的応答関数 (文献 [6] の図 1 参照) である.

方程式 (8) は相似解

$$P(r, \tau) = N(\epsilon t^3)^{-3/2} p(\epsilon^{1/3} \tau / r^{2/3}), \quad p(s) = \exp \left[ \frac{9}{4} \int_1^s \frac{1}{x^2 F(x)} dx \right] \quad (10)$$

を持つ [7] †. LRA 理論により得られる相似解 (10) を用いてモーメント

$$\langle r^{2n} \rangle = 4\pi \int_0^\infty r^{2n+2} P(r, \tau) dr$$

を計算すると

$$\langle r^2 \rangle = 4.7 \epsilon \tau^3, \quad \langle r^4 \rangle / \langle r^2 \rangle^2 = 2.5, \quad \langle r^6 \rangle / \langle r^2 \rangle^3 = 10.9 \quad (11)$$

† 文献 [5] の式 (5.4) と文献 [6] の式 (65) の相似解は  $K$  が時間変化しない場合に限られる.

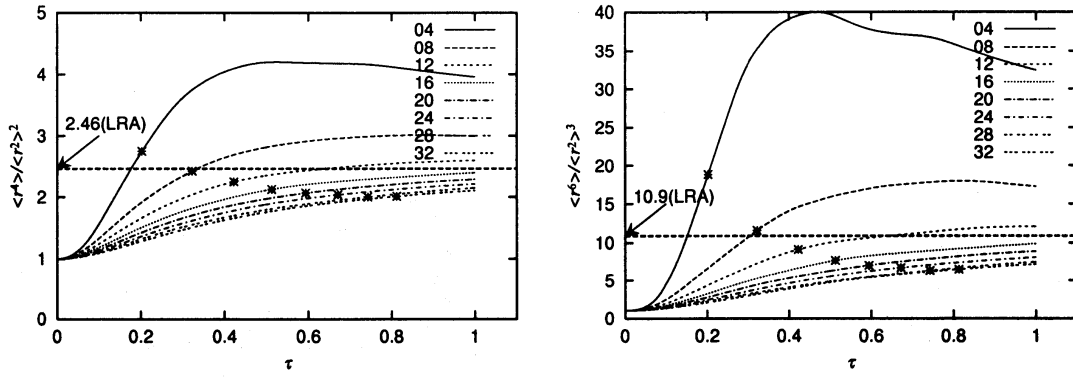


図 7: 図 6 と同じデータから作成した  $\langle r^4 \rangle / \langle r^2 \rangle^2$  vs.  $\tau$  の値のプロット (左) と  $\langle r^6 \rangle / \langle r^2 \rangle^3$  vs.  $\tau$  の値のプロット (右).

となる. 式 (11) の結果は Richardson の結果<sup>[2]</sup> 及び慣性小領域における次元解析から得られる結果<sup>[3]</sup> と無矛盾である.  $\langle r^2 \rangle^{1/2}$  が慣性小領域にあるという条件の下, 相似解 (10) は  $\tau \gg (r_0^2/\epsilon)^{1/3}$  に対する  $P(r, t; r_0, t_0)$  の漸近形を与えると期待できる. そこで, 以下では慣性小領域のある DNS (Run1024 の  $t = [4.5, 5.5]$ ) によって得られた  $O(10^5)$  個の流体粒子の軌跡データを用いて上記の理論解析結果の検証を行う.

粒子間の距離  $r$  のモーメント及び確率密度関数の数値計算結果と理論の比較を行う前に相似解 (10) の導出の際に用いた仮定の妥当性を確認する. 図 6 左は粒子追跡開始時の二粒子間の各距離  $r_0 = n\Delta x \approx 0.7n\eta$ , ( $n = 4, 8, 12, \dots, 32$ ) に対して  $\langle r^2 \rangle^{1/2}/\eta$  vs.  $\tau/t_\eta$  の値をプロットしたものである. 横軸と縦軸の最大値は各々  $T$  と  $L$  を, マークは各  $r_0$  に対する  $\tau_0 = (r_0^2/\epsilon)^{1/3}$  を表す. 図より,  $\tau_0 \ll \tau \ll T$ ,  $\eta \ll \lambda < r \ll L$  の条件を満たす時間及び長さスケールの領域 (図中のマークの右かつ  $\lambda$  の値を示す横線の上側) が非常に限られている様子が分る. 図 6 右は左の図と同じデータを用いて  $\langle r^2 \rangle / (\epsilon \tau^3)$  の値を  $\tau$  の関数として図示したものである. 各  $r_0$  の値に依らず  $\tau \gg \tau_0$  の時間領域で  $\langle r^2 \rangle \sim \epsilon \tau^3$  となる傾向があること, 及び,  $\langle r^2 \rangle / (\epsilon \tau^3)$  の値の漸近値は  $r_0$  の値に強く依存していることが分る. また,  $r_0 < \lambda$  となる  $r_0 = n\Delta x$ , ( $n < 20$ ) よりも  $r_0 \approx \lambda$  もしくは  $> \lambda$  となる  $n = 20 - 32$  の方が  $\langle r^2 \rangle / (\epsilon \tau^3)$  の LRA の理論値により近い値に漸近する傾向があることも分る. 図 7 は  $r$  のモーメントの比に対する理論式 (11) と DNS データを比較したものである. 図 7 より  $r_0$  が慣性小領域の長さスケールに近いほどモーメントの比  $\langle r^4 \rangle / \langle r^2 \rangle^2$  と  $\langle r^6 \rangle / \langle r^2 \rangle^3$  の値の  $r_0$  依存性が小さくなっていく傾向があることが分る. また,  $r_0 \approx \lambda$  の場合の  $\langle r^4 \rangle / \langle r^2 \rangle^2$  と  $\langle r^6 \rangle / \langle r^2 \rangle^3$  の  $\tau$  大での値はいずれも LRA の理論値より小さいが, より大きい  $\tau$  で近づく傾向があることが分る. (二粒子間の距離  $r$  が  $L$  に近づくとその統計はエネルギー保有領域のスケールにおける人工的な外力に支配されるようになると考えられるため, 特に有限の慣性小領域しか実現できない DNS においては  $\tau$  を過剰に大きくとることが出来ないことに注意!)

次に  $r$  の PDF について調べた結果を述べる. 二粒子間の距離  $r$  が  $r - dr/2$  と  $r + dr/2$  の間にある確率は式 (10) の  $P$  を用いると  $4\pi r^2 P(r, t) dr$  で与えられる. 式 (10) より,

$$(\epsilon t^3)^{1/2} \cdot 4\pi r^2 P(r, t) = 4\pi N a^2 p(a^{-2/3}) = f(a), \quad a = r/(\epsilon t^3)^{1/2}$$

となり,  $f$  が  $a = r/(\epsilon t^3)^{1/2}$  の普遍関数になることが示唆されるので, 規格化定数  $N$  を  $\int_0^\infty f(a) da = 1$  となるように決め, DNS データと比較することを考える. 図 8 はこのように規格化された  $r$  の PDF を各  $r_0 = n\Delta x$ , ( $n = 8, 16, 24, 32$ ) に対して,  $\tau = 0.125, 0.25, \dots, 1.0$  でプロットし LRA の理論曲線と比較したものである.  $r_0 = 4\Delta x$  の場合の図では, 規格化された PDF が時間の経過ととも

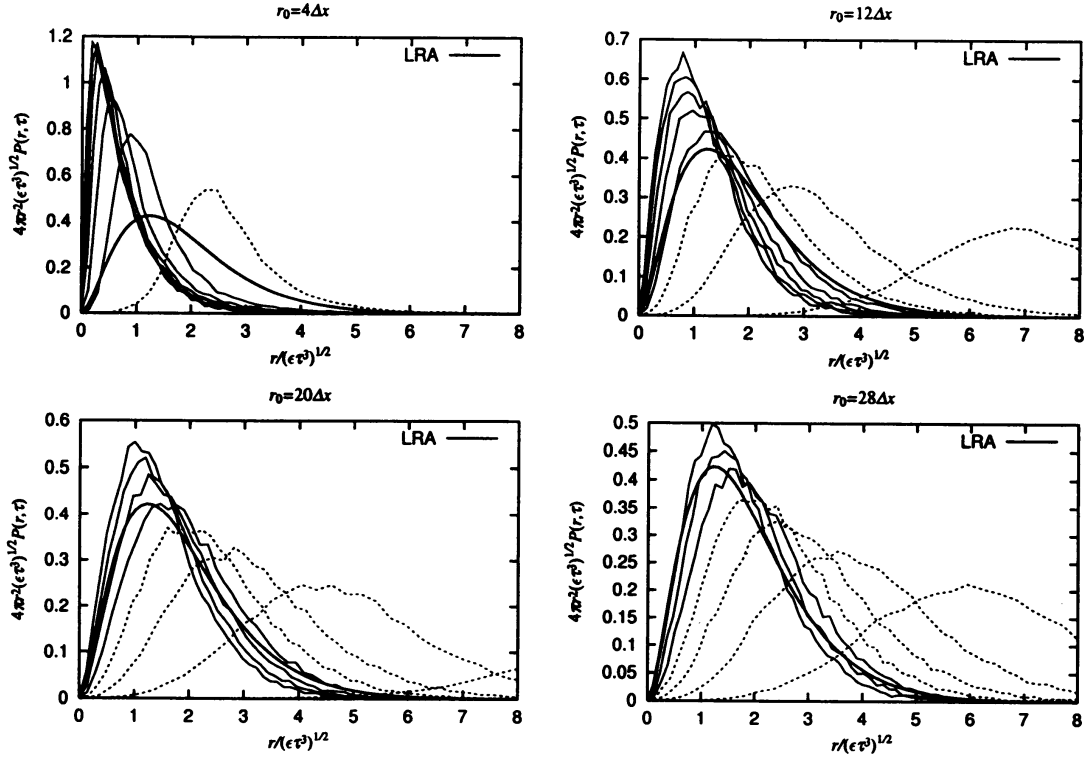


図 8: 図 6 と同じデータから作成した各  $r_0 = n\Delta x$ , ( $n = 8, 16, 24, 32$ ) に対する  $4\pi r^2(\epsilon\tau^3)^{1/2}P(r, \tau)$  vs.  $r/(\epsilon\tau^3)^{1/2}$  のプロットを  $\tau = 0.125, 0.25, \dots, 1.0$  について行ったもの:  $\tau < \tau_0$  を破線,  $\tau > \tau_0$  を実線で示す。太い実線は LRA 理論による式 (10) による結果を示す。

にある形に漸近している様子がよく観察できる。PDF の漸近形が LRA 理論の予測と大幅に異なっているのは、 $r_0$  が散逸領域にあり、理論の導出の仮定を満たしていないためであると考えられる。一方、 $r_0 = n\Delta x$  が  $n = 12, 20, 28$  と大きくなり、慣性小領域の長さスケールに近づくにつれ、PDF の形が LRA 理論による形に近いものに漸近していく様子が観察できる。今回の DNS (Run1024) では十分な慣性小領域が得られていないが理論導出の条件をより満たしていると思われる場合に対して、DNS から得られる PDF が LRA の理論形に近くなるという事実は、より高レイノルズ数のより広い慣性小領域がある一様等方性乱流に対して、LRA が良い近似になっていることを示唆している。

## 5 まとめ

本研究では、格子点数最大  $1024^3$  の一様等方性乱流の DNS を行い、統計的準定常状態にコロモゴロフの  $-5/3$  乗則に従う慣性小領域を実現した。その乱流中で流体粒子を追跡することによりラグランジュ的統計量の計算を行い、(1) ラグランジュ的速度差の二次モーメントの慣性小領域の時間スケールにおける振る舞いの解析、及び、(2) 二粒子拡散に対するリチャードソン則の検証を行った。数値計算結果は LRA スペクトル理論において慣性小領域が十分広いことを仮定した場合に得られる理論結果と比較した。

その結果、(1) では、今回得られた最大の  $R_\lambda = 283$  の場合、式 (1) で定義される  $D_L(\tau)$  が  $\epsilon\tau$  に比例する時間スケールが存在し、比例係数が約 5.0 となることが分った。また、 $R_\lambda$  の値の増加



とともに  $D_L(\tau) \propto \epsilon \tau$  の成立する時間間隔及び比例係数の値が少しづつ増加することが分った。比例係数 5.0 が  $R_\lambda \rightarrow \infty$  の漸近値にどれくらい近いかを判断するためには、今後、高解像度 DNS においてより広い慣性小領域を実現し比例係数を調べる必要がある。今回の DNS (Run1024) では、エネルギー流束関数  $\Pi(k)$  がほぼ一定となる波数領域における  $\Pi(k)$  の値に比べ、エネルギー散逸率  $\epsilon$  の値の時間変化は大きい。ため、上記比例係数の測定にはエネルギー散逸率としての  $\epsilon$  より、エネルギー輸送率としての  $\epsilon$  を用いるほうが適しており、 $D_L(\tau) \propto \epsilon \tau$  となる時間スケールにおいて  $D_L(\tau)$  を支配する物理量は慣性小領域を特徴付けるエネルギー輸送率であることが示唆された。尤も、統計的定常性が非常によい乱流場においては、エネルギー散逸率とエネルギー輸送率は一致するので両者の区別をする必要はない。

(2) では、二粒子の初期の距離  $r_0$  に依らず、いわゆるリチャードソン則 ( $\langle r^2 \rangle \propto \epsilon \tau^3$ ) はよく成立するが比例定数は  $r_0$  に強く依存することが分った。また、 $r_0$  が慣性小領域のスケールに近い場合に得られる  $r$  の PDF の形は、LRA 理論において慣性領域が十分広いと仮定して得られる PDF の形に時間の経過とともに近づく様子が観察され、PDF の理論式の導出の仮定がよく満たされる場合においては LRA は良い近似を与えることが分った。

## 謝辞

上記の計算は、日本学術振興会未来開拓学術研究推進事業 (計算科学プロジェクト) 「地球規模流動現象解明のための計算科学-数理・物理モデルと計算アルゴリズムの開発」 (代表者: 金田行雄) において行ったものである。

## 参考文献

- [1] G. I. Taylor, Proc. London Math. Soc. **20**, 196 (1922).
- [2] L. F. Richardson, Proc. R. Soc. Lond. **110**, 709 (1926).
- [3] A. M. Obukhov, Izv. Akad. Nauk SSSR **5**, 453 (1941).
- [4] A. S. Monin and A. M. Yaglom, "Statistical Fluid Mechanics II," The MIT press (1975).
- [5] R. Kraichnan, Phys. Fluids **9**, 137 (1966).
- [6] Y. Kaneda, Phys. Fluids **29**, 701 (1986).
- [7] S. Ott and J. Mann, J. Fluid Mech. **422**, 207 (2000).
- [8] P. K. Yeung and S. B. Pope, J. Fluid Mech. **207**, 531 (1989).
- [9] P. K. Yeung, Phys. Fluids **6**, 3416 (1994).
- [10] P. K. Yeung, Phys. Fluids **9**, 2981 (1997).
- [11] S. R. Hanna, J. Appl. Met. **20**, 242 (1981).
- [12] J. C. H. Fung, J. C. R. Hunt, N. A. Malik and R. J. Perkins, J. Fluid Mech. **236**, 281 (1992).
- [13] Y. Kaneda, Phys. Fluids, **9**, 1728 (1966).
- [14] Y. Kaneda, Phys. Fluids, **5**, 2835 (1993).